

Le cours illustre la complexité qui croît lorsque l'on passe d'une description d'un composant (limitée à une formule) à la description d'un montage (qui suppose déjà un système d'équations).

Les lois de Kirchhoff permettent de poser toutes ces équations et de retrouver, suite à quelques manipulations, des formules de simplification:

- Composants équivalents à des composants en série ou en parallèle (Résistances, capacités, inductances)
- Théorème de Millman
- Théorème de Kennely plus connu sous le nom de transformation de montage étoile en triangle et réciproquement

Circuits à composants passifs linéaires R, C, L

Composants : Les lois fondamentales pour **R, C** et **L**

Circuits : Énoncé des lois de **Kirchhoff** (loi des **mailles** et loi des **nœuds**)

Exploitation des lois de **Kirchhoff** pour :

- Démontrer des techniques de **réduction** du nombre de composants (composants équivalents)
- Démontrer des théorèmes complémentaires (**Millman, Kennely**)
- Analyser nos premiers circuits

2

Ce chapitre est consacré aux composants R, C et L. L'accent est principalement mis sur les résistances et les capacités, les inductances n'étant quasiment pas exploitées dans ce cours.

Nous rappellerons un certain nombre de lois fondamentales associées à leurs comportements.

Les premières méthodes d'analyse de circuits et basées sur les lois de Kirschoff seront proposées. Elles représentent la base d'un certain nombre de théorèmes développés dans les chapitres suivants.

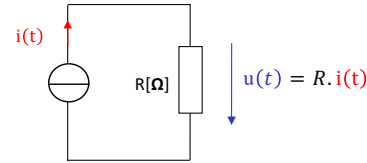
Les lois seront exploitées pour :

- fusionner des composants de mêmes natures selon les configurations de leurs connexions,
- poser des équations exprimant le comportement du circuit

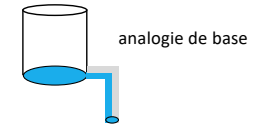
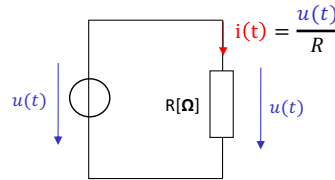
Rappel : Composants de base (La résistance)

Montages caractéristiques de base

Si la source de courant est continue
(valeur constante)
 $U = R \cdot I$



Si la source de tension est continue
(valeur constante)
 $I = \frac{U}{R}$



3

Le composant passif le plus simple est la résistance. L'analyse d'un système composé d'une résistance, d'une tension appliquée à ses bornes et d'un courant la traversant est régi par une loi appelée la loi d'ohm.

Un tel système est souvent comparé à un système hydraulique.

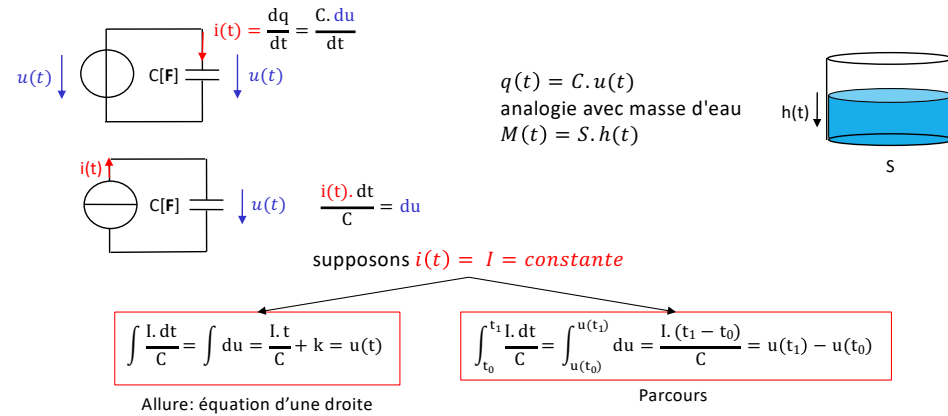
L'énergie potentielle est représentée par :

- la masse d'eau disponible et sa hauteur,
- la section du tuyau permettant de véhiculer l'eau,
- et la quantité d'eau qui circule.

C'est l'une des meilleures analogies avec l'électricité.

Rappel : Composants de base (Le condensateur)

Le condensateur (appelé abusivement Capacité)

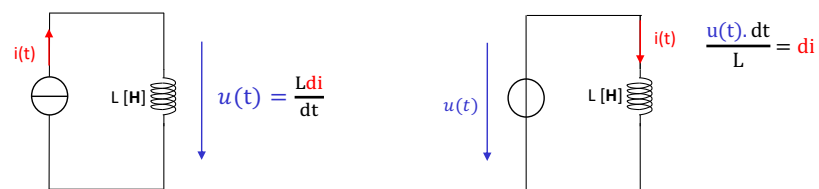


Un condensateur (appelé abusivement *Capacité*, mais on assume) est souvent représenté par un réservoir d'eau.

Selon la section du tuyau qui extrait l'eau du réservoir (ou en amène), l'évolution de la hauteur de l'eau dépend de la surface du réservoir (assimilée à la capacité du condensateur), et la masse totale de l'eau correspond à la charge totale du condensateur.

Contrairement à la résistance, le condensateur ne présente pas une loi simple qui lie U et I.

Rappel : Composants de base (L'inductance)



supposons $u(t) = U = \text{constante}$

$$\int \frac{U \cdot dt}{L} = \int di = \frac{U \cdot t}{L} + k = i(t)$$

Allure: équation d'une droite

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{U \cdot dt}{L} = \int_{i(t_0)}^{i(t_1)} di = \frac{U \cdot (t_1 - t_0)}{L} = i(t_1) - i(t_0)$$

Parcours

Analogie plus subtile entre énergie magnétique $\frac{1}{2} L \cdot I^2$ et énergie cinétique $\frac{1}{2} m \cdot v^2$

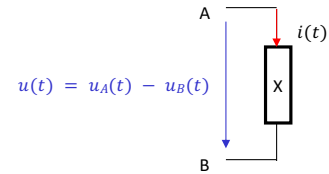
5

L'analogie "hydraulique" avec l'inductance n'existe pas. On se limitera à la loi fondamentale $U = L di/dt$ mettant en évidence la relation entre la tension et le courant.

Un calcul d'intégrale est nécessaire (comme pour le condensateur), illustré ici avec le cas particulier où la tension appliquée aux bornes de l'inductance est constante.

Les composants passifs Lois fondamentales

Composant passif quelconque



Composants R, L, C

$u(t) = f_1(i(t))$ $i(t) = f_2(u(t))$

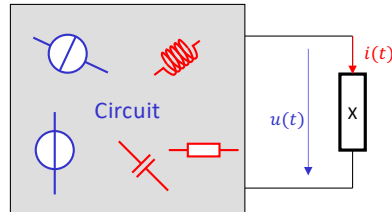
| R | $R \cdot i(t)$ | $\frac{u(t)}{R}$ |
|---|--------------------------------------|--------------------------------------|
| C | $\frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt + k$ | $C \frac{du}{dt}$ |
| L | $L \frac{di}{dt}$ | $\frac{1}{L} \int u(t) \cdot dt + k$ |

6

Le tableau suivant permet de résumer les différentes relations entre U et I pour les trois composants passifs de base.

Lorsqu'un calcul intégral est nécessaire alors que les limites du calcul ne sont pas connues, le résultat est exprimé à une constante près.

Assemblage de composants Analyse de circuits



$$i(t) = F_2(X, \text{composant}_1, \dots, \text{composant}_n, \text{source}_1, \dots, \text{source}_m)$$

$$u(t) = F_1(X, \text{composant}_1, \dots, \text{composant}_n, \text{source}_1, \dots, \text{source}_m)$$

Première série de méthodes: **les lois de Kirchhoff**

7

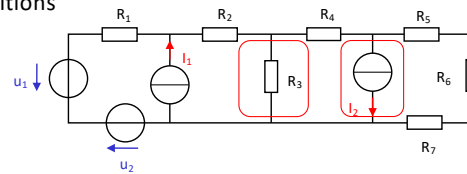
Les combinaisons de ces composants et des sources (de courant et/ou de tension) vont produire des circuits que nous allons étudier.

Dans ces circuits il sera généralement nécessaire d'identifier un (ou plusieurs) composant(s) dont on déterminera la (leurs) tension(s) à ses (leurs) bornes et/ou le(s) courant(s) qui le(s) traverse(nt).

Vu le nombre élevé de composants pour certains circuits, des méthodes d'analyse devront être développées à partir des lois de Kirchhoff décrites ci-après.

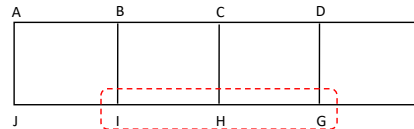
Lois de Kirchhoff

Définitions



Un circuit est composé de **segments** :

- Ils portent des composants
- Se connectent entre eux



On nomme les extrémités des **segments** :

- Les **nœuds**.

On observe un réseau où l'on identifie :

Des **nœuds** : Connexion entre deux segments au moins. Exemple : A (2 segments) et B (3 segments)

Des **branches** : Succession de segments connectés deux par deux. Exemple : ABCD

Des **mailles** : Parcours fermé, constitué de branches, ne passant qu'une seule fois par un nœud donné

8

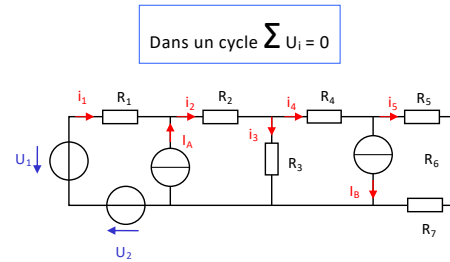
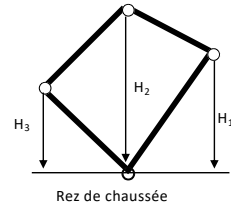
Les lois de Kirchhoff sont utilisées pour poser les équations exprimant le comportement en courant et tension des circuits analysés.

Ces lois reposent sur une identification de deux ensembles d'éléments :

- le premier ensemble regroupe les mailles du circuit. Chaque maille correspond à une série de segments générant un parcours fermé (bouclé). Chaque segment porte un composant ou une source et la relation entre deux segments s'appelle un nœud.
- Le second ensemble regroupe les nœuds du circuit. Chaque nœud correspond à un lien direct entre deux ou plusieurs segments.

Lois de Kirchhoff : Loi des mailles

Loi des mailles



Objectif : on veut calculer toutes les tensions ou tous les courants du circuit

Attention: Pour être calculable, **une maille ne doit pas inclure de sources de courant**

Conséquence: Trois mailles possibles, mais uniquement deux **mailles indépendantes**

Description des mailles (se rappeler des conventions)

- ✓ $R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 + R_3 \cdot i_3 + U_2 - U_1 = 0$
- ✓ $R_4 \cdot i_4 + R_5 \cdot i_5 + R_6 \cdot i_5 + R_7 \cdot i_5 - R_3 \cdot i_3 = 0$
- ✓ $R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 + R_4 \cdot i_4 + R_5 \cdot i_5 + R_6 \cdot i_5 + R_7 \cdot i_5 + U_2 - U_1 = 0$ (pas indépendante)

9

La loi des mailles est associée au premier ensemble.

On part du principe qu'une "promenade" effectuée sur un parcours à dénivellation démarrant d'un point donné et rebouclant sur ce point, se traduit par une dénivellation totale $\Delta H = 0$. Cette dénivellation peut s'exprimer de manière précise en explicitant les dénivellations intermédiaires effectuées sur le parcours. Dans notre exemple, il s'agit de

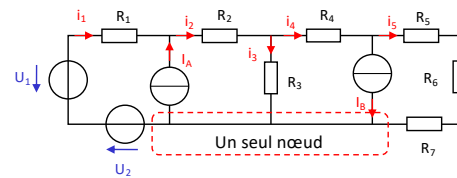
$$(H_3 - 0) + (H_2 - H_3) + (H_1 - H_2) + (0 - H_1) = 0$$

Ce principe est exploité en électricité lorsque la différence de potentiel entre un nœud choisi et lui-même vaut 0V.

Cette valeur est encore égale aux différences de potentiel identifiées sur une maille incluant le nœud choisi.

Lois de Kirchhoff : Loi des nœuds

Lois des nœuds



Dans un nœud:
 $\sum I_{\text{sortants}} - \sum I_{\text{entrants}} = 0$
ou encore $\sum I_{\text{sortants}} = \sum I_{\text{entrants}}$
Rien ne se perd, rien ne se crée

Attention: Pour être calculable, un nœud ne doit pas être relié à une source de tension
Un nœud intéressant doit regrouper au minimum trois courants

Exemples:

- ✓ $i_1 + I_A - i_2 = 0$
- ✓ $i_2 - i_3 - i_4 = 0$
- ✓ $i_4 - I_B - i_5 = 0$
- ✓ $i_5 + I_B + i_3 - I_A - i_1 = 0$
(pas indépendante)

Poser l'ensemble des équations indépendantes satisfaisant la loi des mailles et la loi des nœuds: **Calcul matriciel**

CONSTAT:

- Avec un ordinateur: calcul rapide
- A la main: rapidement très long
- Au moins on comprend à quoi cela sert

10

La loi des nœuds complète la vision du circuit et a pour principe que rien ne se crée et rien ne se perd.

Si l'on analyse le bilan des électrons circulant sur un conducteur, on peut affirmer que tous les électrons qui entrent dans ce conducteur doivent ressortir.

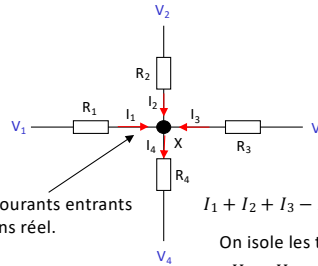
En terme de courant, c'est la même chose. Les segments étant reliés par des nœuds, la somme de tous les courants aboutissant à un nœud doit être identique à la somme des courants qui ressortent du nœud.

Pour des circuits complexes, les deux lois peuvent générer un nombre d'équations très élevé rendant impossible une résolution "humaine", nécessitant alors la puissance d'un ordinateur.

Techniques de simplification

Théorème de Millman [1]

Théorème de Millman est issu des lois de Kirchhoff. Il permet de calculer une tension d'un nœud quelconque en fonction de son voisinage



$$V_X = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

Arbitrairement, on dessine des courants entrants et sortants sans se soucier du sens réel.

Physiquement cela semble être une erreur, mais algébriquement des courants peuvent être négatifs ou positifs. S'ils sont négatifs c'est qu'en réalité ils allaient dans l'autre sens

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 = \frac{V_1 - V_X}{R_1} + \frac{V_2 - V_X}{R_2} + \frac{V_3 - V_X}{R_3} - \frac{V_X - V_4}{R_4}$$

On isole les termes en V_X

$$\frac{V_X}{R_1} + \frac{V_X}{R_2} + \frac{V_X}{R_3} + \frac{V_X}{R_4} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4}$$

Il ne reste plus qu'à factoriser et isoler V_X pour retrouver la formule proposée

11

Le théorème de Millman permet de calculer le potentiel en un nœud quelconque en fonction de son voisinage.

Le nœud X relie plusieurs segments et le potentiel à l'extrémité de chaque segment est connu. Le potentiel du nœud X est calculé à partir d'une formule démontrée à l'aide de la loi des nœuds de Kirchhoff, en tenant compte des conductances (une conductance est l'inverse d'une résistance) et des potentiels des segments.

La formule obtenue rappelle le calcul d'un barycentre en mécanique.

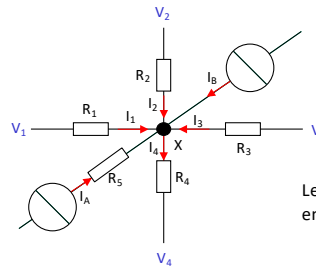
Le principe reste le même lorsque les résistances seront remplacées par des impédances.

Dans la démonstration, il faut souligner que les potentiels V_1 , V_2 , V_3 et V_4 ne sont pas des sources, mais des **valeurs de potentiels**. Cela impose une remarque importante. Les tensions V_1 , V_2 , V_3 , V_4 sont généralement des sources reliées à la masse. Dans ce cas, les potentiels représentés sur le schéma correspondent à la différence de potentiel de la source par rapport à la masse.

Techniques de simplification

Théorème de Millman [2]

Le théorème de Millman est exploitable aussi avec la présence de sources de courants.



$$V_X = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4} + I_A + I_B}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

Le principe pour poser l'équation, repose encore sur la loi des nœuds de Kirchoff.

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_A + I_B = 0 = \frac{V_1 - V_X}{R_1} + \frac{V_2 - V_X}{R_2} + \frac{V_3 - V_X}{R_3} - \frac{V_X - V_4}{R_4} + I_A + I_B$$

Suite identique à la diapositive précédente

Remarque : Si une tension $V_i = 0$? Il faut tenir compte de $1/R_i$ au dénominateur

12

Pour généraliser le théorème de Millman, il faudrait aussi tenir compte de la présence de sources de courants.

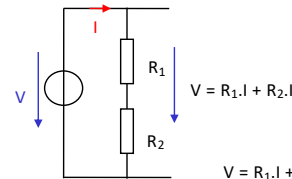
Dans ce cas, si des résistances sont **associées en série** avec des sources de courant, la loi des nœuds montre qu'elles ne seront pas prises en compte. Le courant de la source étant identique au courant de la résistance en série.

Cas particulier intéressant : Lorsque le nœud étudié fait apparaître une branche avec une résistance connectée à la masse, il faut assimiler cette situation à une source de tension nulle en série avec la résistance.

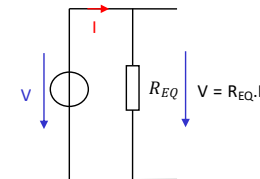
Il faudra uniquement inclure l'expression de la conductance au dénominateur. Au numérateur une tension nulle n'ajouterait aucun terme.

Simplifications intermédiaires (Résistances)

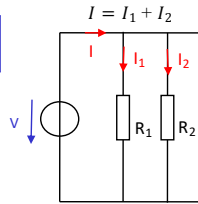
Les résistances en série



$$V = R_1.I + R_2.I = R_{EQ}.I \Rightarrow R_{EQ} = R_1 + R_2$$



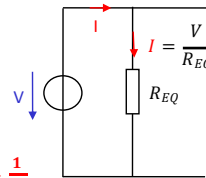
Les résistances en parallèle



$$I_1 = \frac{V}{R_1} \text{ et } I_2 = \frac{V}{R_2}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

$$I = \frac{V}{R_{EQ}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



13

Les circuits font souvent apparaître des combinaisons de composants de mêmes natures. Souvent lors d'une phase de réalisation de circuits, une valeur précise de résistance (ou de condensateur) est impossible à trouver : La normalisation des valeurs limite le nombre de composants disponible. Il faut alors combiner plusieurs composants (mise en série, parallèles, ...) pour trouver une valeur proche de notre choix.

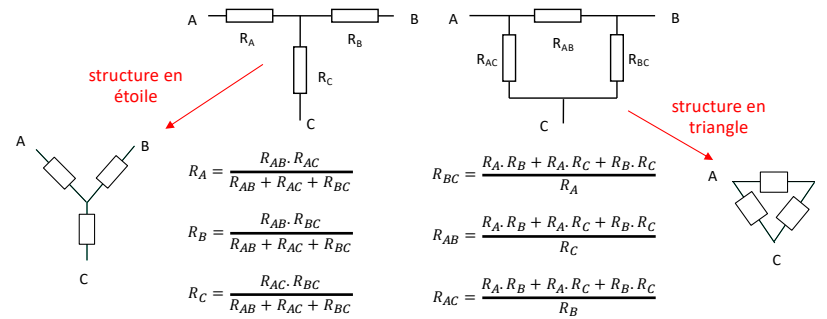
Les relations obtenues entre ces composants sont décrites par les lois de Kirchhoff . On utilisera ces lois pour redémontrer quelques transformations de base.

- Par exemple la mise en série de deux résistances.
 $U = R_1.I + R_2.I = R_{eq}.I$, d'où l'on extrait $R_1 + R_2 = R_{eq}$
- La mise en parallèle de deux résistances
 $U = R_{eq}.I = R_1.I_1 = R_2.I_2$ or $I = I_1 + I_2$
 ou encore $U/R_{eq} = U/R_1 + U/R_2$
 Soit finalement $R_{eq} = R_1.R_2/(R_1 + R_2)$

Simplifications intermédiaires (Résistances)

Théorème de Kennely

Théorème de Kennely utile pour des transformations de structures en étoile vers triangle et réciproquement



Méthode de démonstration :

1. Déconnecter une borne
2. Regarder la résistance entre les deux autres bornes

14

Le théorème de Kennely permet de transformer une structure étoile (ou en T) en une structure triangle (ou en Π) et réciproquement.

Les différentes formules sont assez complexes mais peuvent se démontrer par les artifices suivants :

Puisqu'il s'agit des mêmes circuits, il suffit de déconnecter une borne (par exemple B) et d'observer le courant circulant entre les deux autres bornes. Le courant circulant entre les deux bornes (A et C par exemple) est évidemment identique dans les deux circuits si la tension entre les deux points est identique, en partant du principe que les résistances sont identiques. Par exemple, on observe entre A et C des résistances de mêmes valeurs:

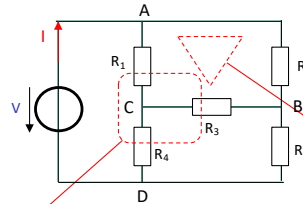
$R_A + R_C$ pour la structure étoile

$R_{AC} // (R_{AB} + R_{BC})$ pour la structure triangle.

En posant toutes les égalités, on retrouve les relations souhaitées.

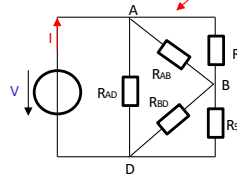
Justification avec un exemple, de la transformation étoile – triangle ou triangle - étoile

Imaginons qu'on veuille calculer le courant I

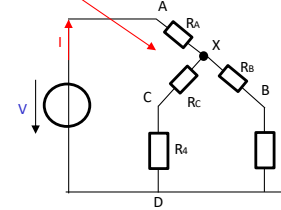


Dans ce circuit, il n'y a ni résistances en série, ni résistances en parallèle. Sans réduction, il faudrait poser les équations à partir des lois de Kirchhoff

Transformation étoile ABD avec centre C en triangle

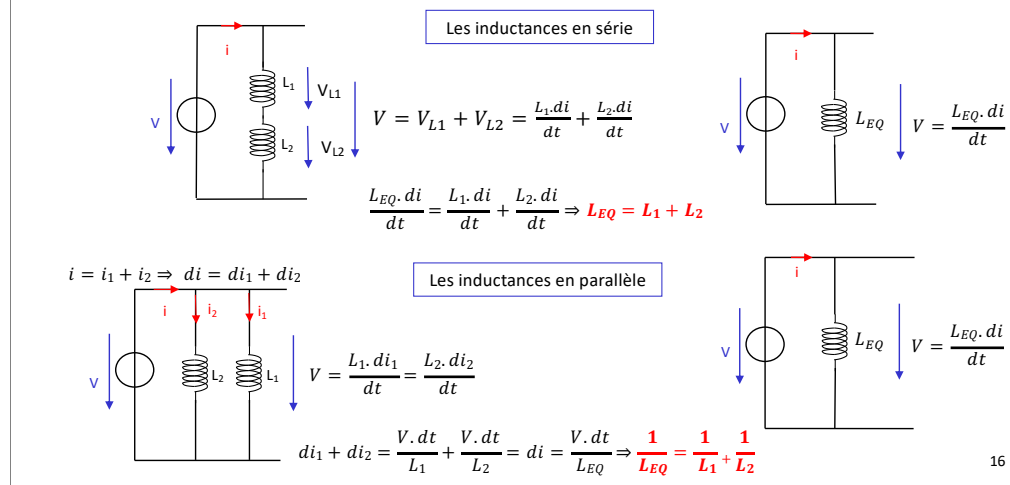


Transformation triangle ABC en étoile



Une fois que l'on obtient par transformation, l'un des deux circuits, on voit que la situation est débloquée car des résistances se retrouvent en série et/ou en parallèle et peuvent donc fusionner

Simplifications intermédiaires (Les inductances)



16

Avec Kirchhoff, il est possible de retrouver des simplifications affectant d'autres composants.

Pour les inductances en série ou en parallèle, les expressions des fusions sont comparables à celles mises en évidence avec les résistances.

Dans la configuration série :

$$U = L_1 di/dt + L_2 di/dt = (L_1 + L_2) di/dt = L_{eq} di/dt, \text{ d'où } L_1 + L_2 = L_{eq},$$

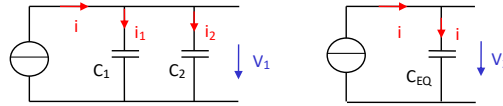
Dans la configuration parallèle :

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{et} \quad U = L_1 di_1/dt = L_2 di_2/dt = L_{eq} di/dt,$$

$$di_1/dt = U/L_1, \quad di_2/dt = U/L_2 \quad \text{et} \quad di/dt = U/L_{eq}$$

$$\text{or } di/dt = di_1/dt + di_2/dt \quad \text{d'où } 1/L_1 + 1/L_2 = 1/L_{eq},$$

Simplifications intermédiaires (Capacités parallèles)



La résolution peut se faire en posant $i = i_1 + i_2$ mais méthode plus simple avec les charges

$V_1 = V_2$ car si la source est identique, les équipotentielles le sont aussi

$Q_{EQ} = Q_1 + Q_2$ La charge totale qui sera déplacée, et donc stockée, est la même

$Q_{EQ} = C_{EQ} \cdot V_2 = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_1 \Rightarrow C_{EQ} \cdot V_2 = (C_1 + C_2) V_1$

Finalement $C_{EQ} = C_1 + C_2$ Comparer avec l'expression des résistances en parallèle

17

Avec les condensateurs, les principes sont toujours comparables.

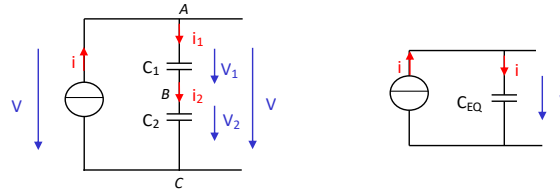
En parallèle, on peut affirmer que le courant I se répartit pour charger les deux condensateurs.

La charge totale sur les deux condensateurs en parallèle est égale à la charge stockée sur un condensateur unique équivalent.

$Q_T = Q_1 + Q_2$ or $Q_T = C_{eq} \cdot U = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U$

On a directement $C_{eq} = C_1 + C_2$

Simplifications intermédiaires (Capacités séries)



$$V = V_1 + V_2 \text{ et } dV = dV_1 + dV_2 \Rightarrow \frac{i \cdot dt}{C_{EQ}} = \frac{i_1 \cdot dt}{C_1} + \frac{i_2 \cdot dt}{C_2} = \frac{i \cdot dt}{C_1} + \frac{i \cdot dt}{C_2}$$

Or $i = i_1 = i_2$, on peut factoriser par $i \cdot dt$ et on a directement

$$\frac{1}{C_{EQ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

18

En série, comme pour la résistance, on part du principe que le courant qui circule dans la boucle reste le même pour tous les composants de la boucle.

$$I = I_1 + I_2$$

Les deux condensateurs stockent donc une charge identique.

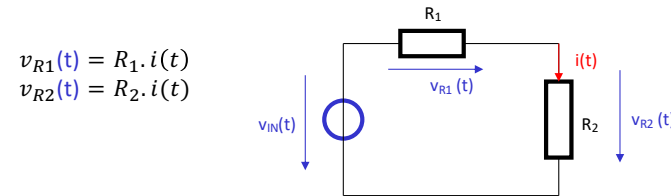
$Q_{eq} = Q_1 = Q_2$ où Q_{eq} correspond à la charge d'un condensateur équivalent aux deux condensateurs en série.

$$\text{Or } Q_1/C_1 = U_{C1}, Q_2/C_2 = U_{C2} \text{ et } Q_{eq}/C_{eq} = U_2$$

D'autre part $U_2 = U_{C1} + U_{C2}$ et $Q_1 = Q_2 = Q_T$ imposent donc

$$Q_{eq}/C_{eq} = Q_{eq}/C_1 + Q_{eq}/C_2 \text{ soit } 1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2$$

Exploitation des lois de Kirchhoff cas particulier: Le diviseur résistif



$$v_{R1}(t) = R_1 \cdot i(t)$$

$$v_{R2}(t) = R_2 \cdot i(t)$$

$$v_{IN}(t) = v_{R1}(t) + v_{R2}(t)$$

$$v_{IN}(t) = R_1 \cdot i(t) + R_2 \cdot i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{v_{IN}(t)}{R_1 + R_2}$$

$$v_{R2}(t) = R_2 \cdot i(t) = R_2 \cdot \frac{v_{IN}(t)}{R_1 + R_2} \Rightarrow v_{R2}(t) = v_{IN}(t) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

19

Les lois de Kirchhoff vont nous permettre de poser des équations de circuits combinant des composants de différentes natures.

Le principe reste le même, seule la résolution diffère selon le degré de complexité mathématique.

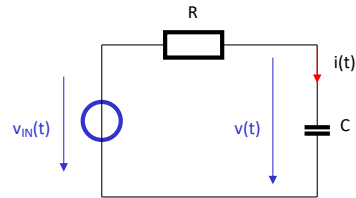
Pour un diviseur résistif, le calcul est d'une grande simplicité.

On pose $V = R_2 \cdot I$ et $U_{IN} = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I$

On obtient directement la relation $V = U_{IN} \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$

Et le courant $I = U_{IN} / (R_1 + R_2) = V / R_2$

Exploitation des lois de Kirchhoff cas particulier: Circuit RC équation différentielle du premier ordre



$$\text{méthode 1 : } R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt - v_{IN}(t) = 0 \Rightarrow i(t) + RC \cdot \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{dv_{IN}}{dt}$$

$$\text{méthode 2 : } i(t) = \frac{v_{IN}(t) - v(t)}{R} = C \cdot \frac{dv}{dt} \quad \text{Ou encore } v_{IN}(t) = v(t) + RC \cdot \frac{dv}{dt}$$

20

Lorsque l'on combine des résistances et des condensateurs, on obtient des équations différentielles du premier ordre.

En effet, $U_{IN} = U_R + U_C$

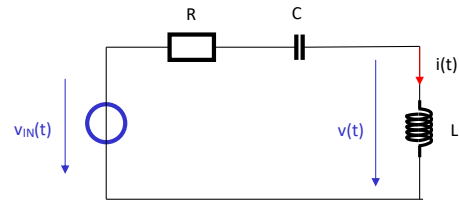
U_C représentant une expression intégrale, on obtient une équation différentielle du premier ordre.

Nous exploiterons ce type d'expression lors de l'étude spécifique des circuits RC

Exploitation des lois de Kirchoff

cas particulier: Circuit RLC

équation différentielle du second ordre



$$v_{IN}(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$C \cdot \frac{dv_{IN}}{dt} = RC \frac{di}{dt} + i(t) + LC \frac{d^2i}{dt^2} = i(t) + RC \cdot \frac{di}{dt} + LC \cdot \frac{d^2i}{dt^2}$$

$$\text{Cas particulier si } v_{IN} = \text{cte} \Rightarrow 0 = i(t) + RC \cdot \frac{di}{dt} + LC \cdot \frac{d^2i}{dt^2}$$

21

Lorsque l'on combine des résistances, des condensateurs, et des inductances, on trouve des équations différentielles du second ordre.

$$U_{IN} = U_R + U_C + U_L$$

U_C représentant une expression intégrale, et U_L représentant une dérivée, on obtient une équation différentielle du second ordre.